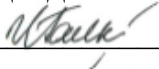


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
ПЕРМСКИЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ –
ФИЛИАЛ ФИНУНИВЕРСИТЕТА

РАССМОТРЕНО
на заседании ПЦК
информационных систем и
программирования
Протокол № 6 от «24» января 2024 г.
Председатель ПЦК
 /И.В. Галкин

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по дисциплине «Элементы высшей математики»
по теме «Непрерывность функции»

для специальности 09.02.07 Информационные системы и
программирование

г. Пермь, 2024

Разработчик:

Виноградова Н.А., преподаватель высшей квалификационной категории Пермского филиала Финуниверситета

Рецензент: Ставицкая Е.А., преподаватель первой категории Пермского филиала Финуниверситета

Одобрено Научно-методическим советом филиала
Протокол № 3 от «28» марта 2024 г.

Оглавление

Пояснительная записка.....	3
Непрерывность функции	5
Свойства непрерывных функций.....	7
Примеры исследования функции на непрерывность	8
Упражнения для самостоятельного решения	10

Пояснительная записка

Методические рекомендации по дисциплине «Элементы высшей математики» по теме «Непрерывность функции» предназначены для студентов, обучающихся на базе основного и среднего общего образования, по программам подготовки специалистов среднего звена, для специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики.

Цель методических рекомендаций: оказание помощи студентам в организации самостоятельного изучения учебного материала в форме лекции и практических работ. Выполнение самостоятельных внеаудиторных работ позволяет формировать в соответствии с ФГОС СПО следующие компетенции:

- Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам ОК 01.
- Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности ОК 02.
- Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие ОК 03.
- Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами ОК 04.
- Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста ОК 05.
- Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей ОК 06.
- Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях ОК 07.

- Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности ОК 08.
- Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности ОК 09.

В методической работе автором кратко излагается теоретический материал по заданной теме, даются рекомендации к выполнению практических заданий.

Непрерывность функции

Функция называется непрерывной в точке a , если :

- 1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a ;
- 2) существует предел в точке a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 3) этот предел равен значению функции в точке a , т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Функция называется *непрерывной на интервале*, если она непрерывна в каждой точке интервала.

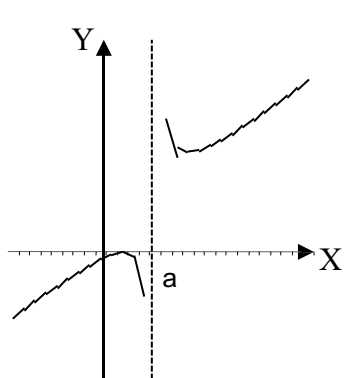
В противном случае, т. е. когда предел функции $f(x)$ в точке a не существует или существует, но не равен $f(a)$, функция $f(x)$ называется *разрывной* в точке a , а точка a — *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Если существуют конечные пределы $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$; $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ причем не все три числа $f(a), f(a-0), f(a+0)$ равны между собой, то a называется *точкой разрыва I рода*.

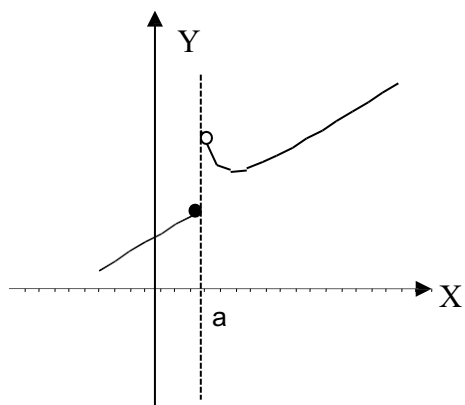
Точки разрыва I рода подразделяются, в свою очередь:

- на *точки устранимого разрыва* (когда $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, т. е. когда левый и правый пределы функции в точке a равны между собой, но не равны значению функции в этой точке)
- на *точки скачка* (когда $f(a-0) \neq f(a+0)$, т. е. когда левый и правый пределы функции в точке a различны); в последнем случае разность $f(a+0) - f(a-0)$ называется *скачком* функции в точке a .

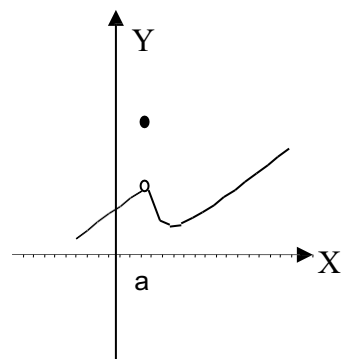
Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются *точками разрыва II рода*. В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов.



Здесь точка a – точка разрыва II рода.



Здесь точка a – точка разрыва I рода – точка скачка



Здесь точка a – точка разрыва I рода – точка устранимого

Свойства непрерывных функций

Теорема 1. Сумма конечного числа функций, непрерывных в точке a , есть функция, непрерывная в этой точке.

Теорема 2. Произведение конечного числа функций, непрерывных в точке a , есть функция, непрерывная в этой точке.

Теорема 3. Отношение двух функций, непрерывных в точке a , есть функция, непрерывная в этой точке, если значение функции, стоящей в знаменателе, отлично от нуля в точке a .

Теорема 4. Все основные элементарные функции являются функциями непрерывными во всех внутренних точках области определения.

Примеры исследования функции на непрерывность

Пример 1. Исследовать функцию на непрерывность в точке $x=0$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x > 0 \\ 0 & \text{для } x = 0 \\ -1 & \text{для } x < 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\text{Так как } f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1 \quad f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} (1) = 1$$

$f(-0) \neq f(+0)$, т.е. односторонние пределы существуют, но различны, поэтому в точке $x = 0$ предел функции не существует, а это значит, что рассматриваемая функция разрывна в точке $x=0$, $x=0$ – точка разрыва I рода, точка скачка.

Пример 2. Исследовать функцию $f(x)=1/(3-x)$ на непрерывность в точке $x = 3$.

Решение:

Рассматриваемая функция не является непрерывной в точке $x = 3$, так как она не определена при $x = 3$.

Найдем односторонние пределы в точке $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{3-x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{3-x} = -\infty$$

Таким образом, точка $x=3$ – точка разрыва II рода.

Пример 3. Исследовать функцию на непрерывность в точке $x=0$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Решение:

Рассматриваемая функция определена в точке $x=0$: $f(0)=0^2-1=-1$.

Найдем предел в точке $x=0$, для этого определим ее односторонние пределы в точке $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 - 1) = 0 - 1 = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} 0 = 0$$

Так как предел слева и предел справа не совпадает, значит предела в точке $x=0$ - нет, точка $x=0$ – точка разрыва I рода, точка скачка.

Пример 4. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{x+7}{x^2-4}$

и исследовать функцию в окрестности найденных точек.

Решение:

Функция не определена в точках, где знаменатель равен 0.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \text{ или } x=-2.$$

Найдем односторонние пределы в этих точках.

Для того чтобы определить знак бесконечности, достаточно взять произвольную точку в окрестности точки 2 (-2) и определить знак функции в этой точке.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x+7}{x^2-4} = -\infty & (f(1) = \frac{8}{-3} < 0) \\ \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x+7}{x^2-4} = +\infty & (f(3) = \frac{10}{5} > 0) \\ \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+7}{x^2-4} = +\infty & (f(-3) = \frac{4}{5} > 0) \\ \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x+7}{x^2-4} = -\infty & (f(-1) = \frac{6}{-3} < 0) \end{aligned}$$

Таким образом, точки $x=2$ и $x=-2$ – точки разрыва II рода.

Упражнения для самостоятельного решения

Исследовать на непрерывность следующие функции:

$$1. f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & \text{при } x \leq -1 \\ 4x^2 + 3x, & \text{при } -1 \leq x \leq 6 \\ \frac{x-7}{2x-2}, & \text{при } x > 6 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 6}$$

$$3. f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$4. f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + x + 1} \begin{cases} 2x - 3, & \text{при } x \leq -5 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x^3 + 9, & \text{при } x > -5 \\ \frac{x^2 + 9}{x^2 + 3}, & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x + 8} \\ 5 - 6x, & \text{при } x \geq -2 \end{cases}$$